Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

"Εύκολη περίπτωση". Έστω το γραμμικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n &= y_1 \\
u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n &= y_2 \\
&\ \vdots \\
u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= y_{n-1} \\
u_{nn}x_n &= y_n .
\end{aligned}
$$

Το γράφουμε στη μορφή πινάκων $U\vec{x}=\vec{y}$, $U=(u_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ άνω τριγωνικός $u_{ij}=0$ $i>j$ και $\det U = u_{11}u_{22}\dots u_{nn}$
$\det U \neq 0$ (δηλ. ο U είναι αντιστρέψιμος) $\Longrightarrow$
$u_{ii}\neq 0$, $i=1,2\dots n$

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της οπισθοδρόμησης

__Αλγόριθμος__: $u_{nn}x_n = y_n \Longrightarrow x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$

__Προηγούμενη__: $u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = y_{n-1}$

__Τυχαία γραμμή__. Για $n=k$

$$u_{kk}x_k + \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j = y_k \Longrightarrow$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}}\left[y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\right]$$

__Απαιτούμενες πράξεις__
a) n διαιρέσεις
b) πολ/μούς και προσθέσεις: $1+2+3+\dots+(n-1) =$
$= \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

Θέσεις μνήμης : $\frac{n^2}{2} + O(n)$

Ιδέα της απαλοιφής Gauss: Με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών μετατρέπουμε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ σε ένα ισοδύναμο $U\vec{x}=\vec{y}$ άνω τριγωνικό. Η διαδικασία καλείται τριγωνοποίηση

Γενική περίπτωση $A\vec{x}=\vec{b}$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος στοιχεία A a_{ij} $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$

Τριγωνοποίηση: Υπόθεση $a_{11}\neq 0$

Πολλαπλασιαστές: $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i=2,3,\dots,n$

Πολλ/ζω την πρώτη εξίσωση με m_{i1}, αφαιρούμε από την i-οστή εξίσωση και αντικαθιστούμε με το αποτέλεσμα της πράξης. Προκύπτει ένα νέο σύστημα $A^{(2)}\vec{x}=\vec{b}^{(2)}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}$$
$$b_{i}^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1$$

Στο βήμα r, $1 \leq r \leq n-1$ (τυχαίο)

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{rr}^{(r)} & \dots & a^{(r)} \\ 0 & a_{nr}^{(r)} & & a_{nr}^{(r)} \end{pmatrix} \qquad b^{(r)} = \begin{pmatrix} b \\ b_2^{(1)} \\ \\ b_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία n-1 φορές ώς καταλήγουμε σε άνω τριγωνικό πίνακα $U = A^{(n)}$

Απαιτούμενες πράξεις

1ο βήμα : m_{i1} , $i=2,\dots n$ $n-1$ πράξεις

$a_{ij}^{(2)}$ χρειάζομαι $(n-1)^2$

i-βήμα : $(n-1)$ πράξεις πολλαπλασιαστικές
$(n-1)^2$ νέα στοιχεία

Υπολογισμό του πινακα

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[(n-i)^2 + (n-i)\right] = \frac{n^3-n}{3}$$

$$= \frac{n^3}{3} + O(n)$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{k} i = ?$$

Δεξί μέλος (b_i): $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n^2-n}{2}$

Συνολικά: $\frac{n^3+3n^2-n}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$ πράξεις

Παράδειγμα: $n=20$

$\frac{20^3}{3} = \frac{8 \cdot 10^3}{3}$, πράξεις. Αν ο υπολογιστής κάνει 10^6 πράξεις / sec

χρόνος: $\frac{8 \cdot 10^3}{3} \cdot 10^{-6}$ sec $= \frac{8}{3} \cdot 10^{-3}$ sec

Κανόνας Cramer: $21 \cdot 20! \cdot 19$ πολ/μους $\approx 3 \cdot 10^5$ αιώνες πράξεις

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

Ακριβής λύση: $\begin{cases} x_1 = 1.0001 \\ x_2 = 0.9998 \ldots \end{cases}$

Πολλαπλασιαστής: $m = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$

$$\begin{cases} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ 0 x_1 + \underbrace{(1-10^4) x_2 = (2-10^4)} \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1 + \text{λάθος υπολογισμού}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

Αλλιως: $\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-4}x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

πολλαπλασιαστής: 10^{-4} $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 0 + (1-10^{-4})x_2 = (1-2\cdot 10^{-4}) \end{cases}$

$\Longrightarrow x_2 \approx 1$

$\Longrightarrow x_1 \approx 1$

Συνεπώς χρειάζεται προσοχή στην εξίσωση που επιλέξουμε ως οδηγό (αυτή που θα πολλ/ω με m_i)